حل نموذج بجروت

(803)-382

موعد مُتعذرين شتاء 2022

طاقم الرياضيات

معهد IQ

سؤال 1

أ. بحسب المعطيات:

يوجد في المجموعة طلاب ومعلمين.

عدد الطلاب يشكل 6 أضعاف عدد المعلمين وعددهم الكلي 56 طالبًا ومعلمًا.

نفرض عدد المعلمين x اذًا عدد الطلاب $6x$

ويتحقق:

$$6x+x=56$$

$$7x=56 \Rightarrow x=\frac{56}{7}=8$$

اذًا عدد المعلمين 8 وعدد الطلاب 6 اضعاف اي $6\cdot 8=48$

للتلخيص:

عدد المعلمين 8
عدد الطلاب 48

ب. بحسب المعطيات:

سعر تذكرة الدخول الى البركة للطالب اقل بـ 11 شيكل من سعر تذكرة الدخول للمعلم

نفرض سعر تذكرة الدخول للمعلم y شيكل

اذًا سعر تذكرة الدخول للطالب $y-11$ شيكل.

بحسب المعطيات منحت ادارة البركة تخفيض بنسبة 18% لكل معلم ولذلك تكلفة تذكرة المعلم الواحد هي

$$(100-18)\%\cdot y = 82\%y = 0.82y$$

المبلغ الكلي الذي دفعه المعلمين هو $8\cdot 0.82y \leftarrow \boxed{6.56y}$

المبلغ الكلي الذي دفعه الطلاب هو $48(y-11) \leftarrow \boxed{48y-528}$

معطى ان المبلغ الكلي الذي دفعه الطلاب والمعلمين هو 1927.20 شيكل، لذلك يتحقق:

$$6.56y+48y-528=1927.20$$

$$\Rightarrow 54.56y=1927.20+528 \Rightarrow 54.56y=2455.2 \Rightarrow \boxed{y=45}$$

إذاً حصلنا على ان سعر التذكرة للمعلم قبل التخفيض (y) هو 45 شيكل. وبالتالي سعر التذكرة للطالب هو:

$$y - 11 = 45 - 11 = 34$$

$\boxed{\text{اي ان سعر التذكرة للطالب هو 34 شيكل}}$

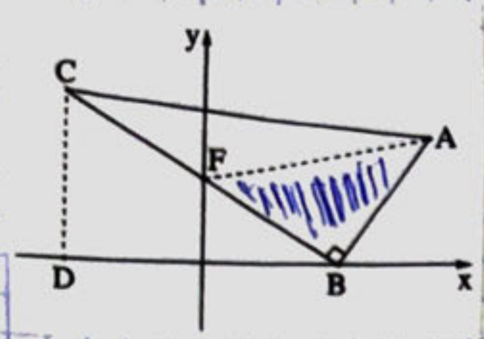
ب.2) سعر التذكرة للمعلم بعد التخفيض هو 0.82y اي

$$0.82 \cdot (45) = 36.9$$

شيكل

اي سعر التذكرة للمعلم بعد التخفيض هو $\boxed{36.9}$ شيكل

سؤال ٥



أ - بحسب المعطيات:

معادلة المستقيم BC هي:

$$BC: y = \frac{-2}{3}x + 4$$

B هي نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x لذلك احداثيات النقطة B من الصورة $(x_B, 0)$ (الاحداثي y_B هو 0).
نعوض في معادلة المستقيم y=0 ونجد x_B.

$$0 = \frac{-2}{3}x_B + 4 \Rightarrow \frac{3}{2}/\frac{2}{3}x_B = 4/\frac{3}{2} \Rightarrow x_B = \frac{12}{2}$$

$$\boxed{B=(6,0)} \Leftarrow \boxed{x_B=6}$$

بحسب المعطيات F هي نقطة تقاطع المستقيم BC مع المحور y اي ان $x_F=0$. نعوض x=0 في معادلة المستقيم BC ونجد y_F:

$$y_F = \frac{-2}{3}\cdot 0 + 4 \Rightarrow \boxed{y_F = 4}$$

لذلك: $\boxed{F(0,4)}$

للتلخيص: $\boxed{F(0,4) \quad , \quad B(6,0)}$

ب. بما أن AB تعامد BC لذلك ميل AB = $\frac{-1}{\text{ميل } BC}$

اي أن ميل AB $= \frac{-1}{\frac{-2}{3}} \Rightarrow \frac{3}{2} \Rightarrow 1.5$

اذا ميل AB هو 1.5.

المستقيم AB يمر ب B, B:(6,0) ومعادلته y=mx+n

نعوض:

$$0 = 1.5\cdot 6 + n \Rightarrow 0 = 9 + n \Rightarrow \boxed{-9 = n}$$

معادلة AB هي: $\boxed{y = 1.5x - 9}$

أ. معطى ان الإحداثي x للنقطة A هو 6، لذلك نعوض في المعادلة للمستقيم AB كان y = 6، ونجد x:

$$y = 1.5x - 9$$

$$6 = 1.5x - 9 \Rightarrow 6 + 9 = 1.5x \Rightarrow 15 = 1.5x$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{1.5} \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

إحداثيات النقطة A هي $\boxed{A:(10,6)}$

ب. مساحة المثلث ABF = $\dfrac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$

الضلع AB هو ارتفاع المثلث ABF وقاعدته BF

نجد أطوال AB و BF ومن ثم نجد مساحته:

$$AB = \sqrt{(10-6)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16+36}$$

$\boxed{\begin{array}{l} A(10,6) \\ B(6,0) \end{array}}$

$$\Rightarrow \boxed{AB = \sqrt{52}}$$

$$BF = \sqrt{(6-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36+16}$$

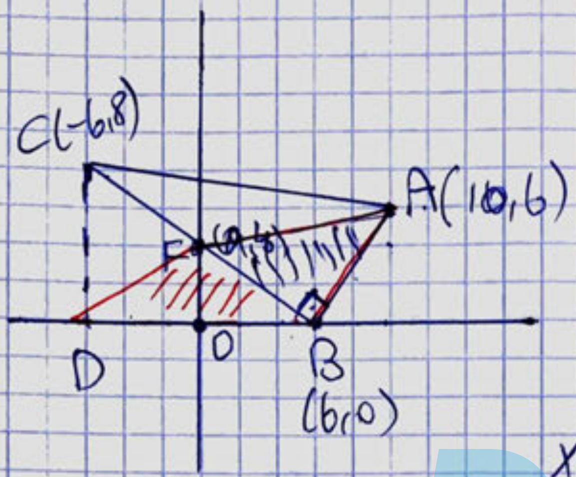
$\boxed{\begin{array}{l} B(6,0) \\ F(0,4) \end{array}}$

$$BF = \sqrt{52}$$

$$\text{مساحة } \triangle ABF = \frac{AB \cdot BF}{2} = \frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{52}}{2} = \frac{52}{2} = 26 \quad \text{ا.م}^2 :$$

$\boxed{\text{مساحة المثلث } ABF = 26 \text{ ا.م}^2}$

(1.ب) تحسيب المعطيات:-
انزلو من النقطة C عموداً على المحور X
العمود يقطع المحور X في النقطة D
الاحداثي X للنقطة C هو نفسه
الاحداثي X للنقطة D
وكذلك معطى أن F هي منتصف
الضلع BC, لذلك يتحقق



$X_F = \frac{X_B + X_C}{2}$ $\quad$ $y_F = \frac{y_B + y_C}{2}$

$0 = \frac{6 + X_C}{2}$ $\quad$ $2/\ 4 = \frac{0 + y_C}{2}\ /2$

$0 = 6 + X_C$ $\quad$ $8 = 0 + y_C$

$\boxed{-6 = X_C}$ $\quad$ $\boxed{8 = y_C}$

$\boxed{C:(-6,8)}$

(2.ب) بما أن الاحداثي x هو نفس الاحداثي في النقطتين D و C
لذلك $D:(-6,0)$

مساحة الشكل الرباعي ABDF = مساحة المثلث ABF + مساحة DBDF

مساحة ABF هي 26 .

نجد مساحة المثلث BDF = $\frac{FO \cdot BD}{2}$ (القاعدة) (الارتفاع)

تقع على المحور X: $BD = X_B - X_D = 6 - (-6) = 6 + 6 = 12 \Rightarrow \boxed{BD = 12}$

$FO = y_F - y_O = 4 - 0 = 4 \Rightarrow \boxed{FO = 4}$

مساحة المثلث BDF = $\frac{12 \cdot 4}{2} \rightarrow \boxed{24}$

مساحة الشكل الرباعي = مساحة ABF + مساحة BDF

$\boxed{50} = 24 + 26$

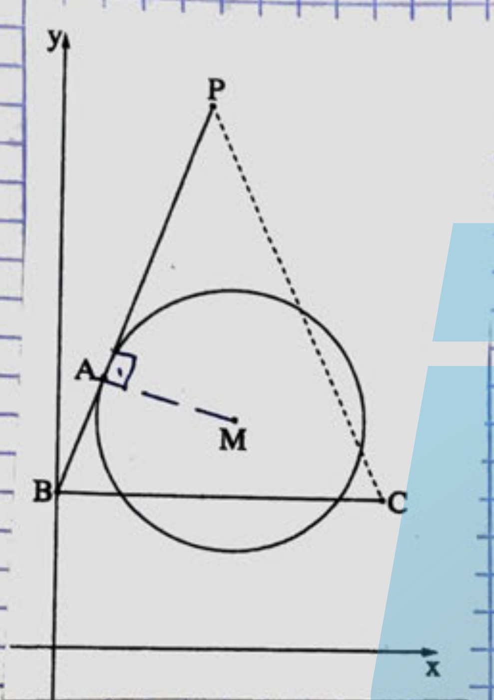
سؤال 3 :

نحسب المعطيات :

مركز الدائرة $M:(4,6)$

احداثيات A هو $A(1,7)$ وتقع على محيط الدائرة.

(أ1) نصف قطر الدائرة هو $R=AM$



$$AM=\sqrt{(1-4)^2+(7-6)^2}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=$$

$$AM=\sqrt{9+1}=\sqrt{10} \Longrightarrow \boxed{R=AM=\sqrt{10}}$$

(أ2) معادلة الدائرة من الصورة

$$(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=R^2$$

$$(x-4)^2+(y-6)^2=(\sqrt{10})^2$$

$$\boxed{(x-4)^2+(y-6)^2=10}$$

(ب) بما أن المماس يعامد نصف القطر

لذلك ميل المماس $= \frac{-1}{AM_{\text{ميل}}}$

1. ميل AM :

$$\text{ميل}_{AM}=\frac{7-6}{1-4}=\frac{1}{-3}$$

اذا ميل $AM=\frac{-1}{3}$

2. نجد أولاً ميل المماس: $\Leftarrow$ ميل المماس $=\frac{-1}{AM_{\text{ميل}}}=\frac{-1}{\frac{1}{-3}}$

$\Leftarrow \frac{3}{1}=3 \Leftarrow$ {اذا ميل المماس في A هو 3}

معادلة المماس من الصورة $y=mx+n$, $m=3$, $A(1,7)$

$$\Longrightarrow 7=3\cdot1+n \Longrightarrow 7=3+n \Longrightarrow 7-3=n \Longrightarrow \boxed{4=n}$$

ومعادلة المماس للدائرة في A هو: $\boxed{y=3x+4}$

ب.) النقطة B هي تقاطع المماس مع المحور y , اي أن الاحداثي x للنقطة B هو 0. نعوض في معادلة المماس ونجد y.

$$y = 3x+4$$

$$y = 3\cdot 0+4 \Longrightarrow y=4 \Longrightarrow \boxed{B:(0,4)}$$

د.) بحسب المعطيات النقطة P هي نقطة تقاطع المستقيمين CP و BP

$$CP:\ y=-2x+19$$

$$BP:\ y=3x+4$$

نحل المعادلتين بمتغيرين ونجد P :-

$$y=-2x+19$$

$$y=3x+4$$

$$\Longrightarrow 3x+4=-2x+19$$

$$3x+2x=19-4$$

$$5x=15 \Longrightarrow x=\frac{15}{5}=3$$

اذا $\boxed{x_P=3}$ نعوض ونجد y_P :

$$y=-2x+19$$

$$x=3 \Rightarrow y=-2\cdot 3+19 \Rightarrow y=-6+19=13$$

$$\boxed{P=(3,13)}$$

هـ) بحسب البند (ب) احداثيات B هي $B:(0,4)$

وبما ان BC يوازي المحور x لذلك للنقطة B و C يوجد نفس الاحداثي y اذا $C:(x_C,4)$

نعوض $y=4$ في معادلة CP ونجد x_C

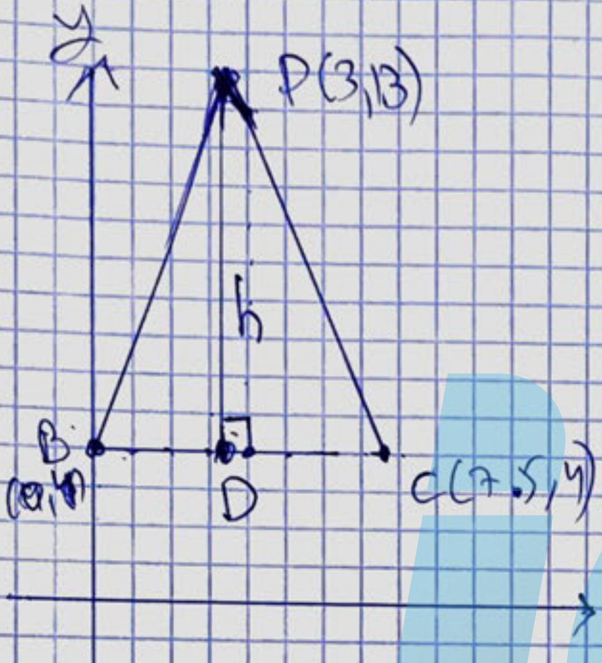
$$CP:\ y=-2x+19 \Rightarrow 4=-2x_C+19 \Rightarrow 4-19=-2x_C$$

$$-15=-2x_C \Longrightarrow x_C=\frac{-15}{-2}=7.5 \Rightarrow \boxed{C:(7.5,4)}$$

إذن: $B:(0,4)$ $C:(7.5,4)$ وبما أن القطعة BC
موازية للمحور X لذلك:

$$BC = 7.5 - 0 = 7.5$$

$$\boxed{BC = 7.5}$$



2. ب

$$S_{\Delta BCP} = \frac{BC \cdot h}{2}$$

$BC = 7.5$

$h = PD$

احداثيات D هي:

$D(3,4)$

لأن لها نفس الاحداثي x لـ P
ونفس الاحداثي y لـ B

إذاً: $h = PD = 13 - 4 = 9$

$$S_{\Delta BCP} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{7.5 \cdot 9}{2} = 33.75$$

إذاً مساحة المثلث BCP هي $\underline{33.75}$

سؤال 4

$$f(x)=10\cdot\sqrt{x}-2.5x$$

أ- مجال تعريف الدالة $x\geq 0$.

ب. تقاطع مع y ← نعوض $x=0$

$$f(0)=10\cdot\sqrt{0}-2.5\cdot 0=0-0=0$$

اذاً التقاطع مع y $\boxed{(0,0)}$

ج- النقاط القصوى تحقق $f'(x)=0$

نجد $f'(x)$

$$f(x)=10\cdot\sqrt{x}-2.5x$$

$$f'(x)=10\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-2.5=\frac{5}{\sqrt{x}}-2.5$$

$$f'(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}-2.5$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{5}{\sqrt{x}}-2.5=0$$

$$\sqrt{x}\,/\,\frac{5}{\sqrt{x}}=2.5\,/\cdot\sqrt{x}\Rightarrow 5=2.5\sqrt{x}\,/:2.5$$

$$\Rightarrow\frac{5}{2.5}=\sqrt{x}\Rightarrow/2=\sqrt{x}/$$ نربع الطرفين

$$\Rightarrow 2^2=x\Rightarrow\boxed{4=x}$$

نجد الاحداثي y للنقطة

نعوض $x=4$ بالدالة:

$$f(x)=10\sqrt{x}-2.5x$$

$$f(4)=10\cdot\sqrt{4}-2.5\cdot 4\Rightarrow\underset{20}{10\cdot 2}-10=10$$

اذاً النقطة القصوى هي $(4,10)$

نحدد نوع النقطة القصوى:

x	0	$x=1$, $0<x<4$	4	$x>4$, $x=9$
$f'(x)$	.	2.5 $+$	0	$-\frac{5}{6}$ $(-)$
$f(x)$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$

$$f'(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}-2.5$$

$$f'(1)=\frac{5}{\sqrt{1}}-2.5=5-2.5=2.5$$

$$f'(9)=\frac{5}{\sqrt{9}}-2.5=\frac{5}{3}-2.5=-\frac{5}{6}$$

$\boxed{\text{اذاً النقطة } (4,10) \text{ هي نهاية عظمى}}$

3_ نفحص أي نقطة من بين النقاط الثلاث تحقق الدالة

$$f(x)=10\cdot\sqrt{x}-2.5x$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=10\cdot\sqrt{1}-2.5\cdot(1)=10-2.5=7.5\neq 0$$

وبالتالي النقطة $(1,0)$ لا تقع على الدالة.

$$x=9 \Rightarrow f(9)=10\cdot\sqrt{9}-2.5\cdot(9)=\overset{30}{10\cdot 3}-22.5=7.5\neq 0$$

وبالتالي النقطة $(9,0)$ لا تقع على الدالة

$$X=16 \Rightarrow f(16)=10\cdot\underset{4}{\sqrt{16}}-2.5\cdot 16=40-40=0$$

اذاً $f(16)=0$ وهي نقطة صفرية للدالة.

نقطة صفرية للدالة $\boxed{(16,0)}$.

هـ 1. إذا B:(16,0) ورسمنا مماساً للدالة في B.

نجد ميل المماس:

ميل المماس $= f'(16)$

$$f'(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} - 2.5$$

$$f'(16) = \frac{5}{\sqrt{16}} - 2.5 = \frac{5}{4} - 2.5$$

$$f'(16) = 1.25 - 2.5 = -1.25$$

$\boxed{\text{اذا ميل المماس } -1.25}$

هـ 2. معادلة المماس في الصورة $y = mx + n$

$\boxed{m = -1.25}$ ويمر بالنقطة $B(16,0)$

نعوض في الصورة العامة لمعادلة المماس ونجد n :-

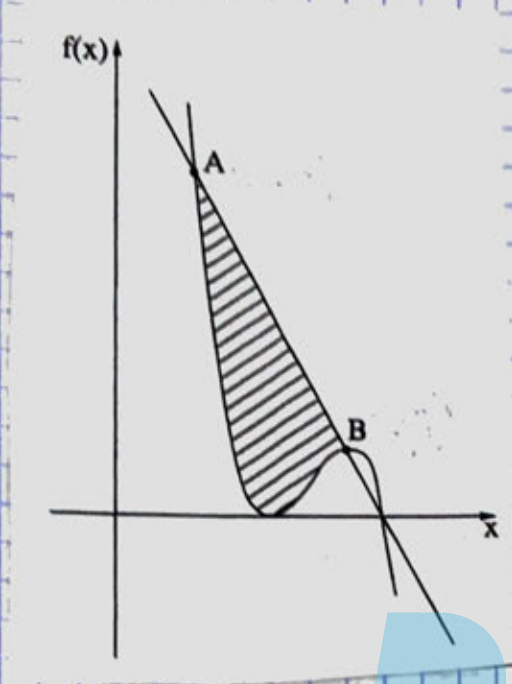
$$0 = -1.25 \cdot 16 + n \Rightarrow 0 =$$

$$0 = -20 + n \Rightarrow \boxed{20 = n}$$

معادلة المماس هي:

$$\boxed{y = -1.25x + 20}$$

سؤال 5



$$f(x) = -4x^3 + 30x^2 - 72x + 56$$

أ- B هي نقطة قصوى عظمى

$B:(x_B, y_B)$ ويتحقق

$$f'(x_B) = 0$$

نجد $f'(x)$

$$f'(x) = -12x^2 + 60x - 72$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow -12x^2 + 60x - 72 = 0 \quad /: -12$$

(نقسم على -12)

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{array}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

بحسب الرسم للدالة $f(x)$ نقطتين قصويتين والنقطة B لها الإحداثي x الأكبر من النقطة الثانية لذلك $\boxed{x_B = 3}$

نجد y_B:

$$f(x) = -4x^3 + 30x^2 - 72x + 56$$

$$f(3) = -4 \cdot \underbrace{3^3}_{27} + 30 \cdot \underbrace{3^2}_{9} - 72 \cdot 3 + 56 = -108 + 270 - 216 + 56 = 2$$

$$f(3) = 2 \longrightarrow \boxed{B(3,2)}$$

ب) معطى أن المستقيم $y=-4x+14$ يمر بـ B

ويقطع الرسم البياني في النقطة A $A(1,10)$

المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $f(x)$

والمستقيم $y=-4x+14$ بين

النقاط A وB (المخططة) هي

$$\int_1^3 (-4x+14)-(-4x^3+30x^2-72+56)\,dx$$

$$=\int_1^3 -4x+14+4x^3-30x^2+72x-56\,dx$$

$$=\int_1^3 4x^3-30x^2+68x-42\,dx$$

$$=\left[x^4-\frac{30x^3}{3}+\frac{68x^2}{2}-42x\right]_1^3$$

$$=\left[x^4-10x^3+34x^2-42x\right]_1^3$$

$$=(3^4-10\cdot\underbrace{3^3}_{27}+34\cdot\underbrace{3^2}_{9}-42\cdot 3)-(1^4-10\cdot 1^3+34\cdot 1-42\cdot 1)$$

$$=\underbrace{(81-270+306-126)}_{-9}-\underbrace{(1-10+34-42)}_{(-17)}$$

$$-9+17=8$$

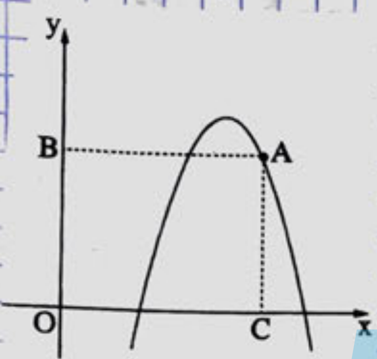
$$\boxed{\text{إذاً المساحة المخططة} = 8}$$

سؤال 6

(أ) بحسب المعطيات, الرسم المرفق هو رسم للدالة $y=-x^2+9x-15$

النقطه A تقع على الرسم البياني للدالة في الربع الأول

اي أن الإحداثي x لها موجب والإحداثي y لها موجب أيضًا



النقطه B تقع على المحور y , اي أن

النقطة B من الصورة $B:(0,y_B)$

والنقطه C تقع على المحور x اي ان النقطة

C من الصورة $C:(x_C,0)$

ABOC مستطيل , ومن هنا نستنتج

ان الاحداثي x للنقطة A هو نفسه الاحداثي x_C للنقطه C

والاحداثي y للنقطه A هو نفسه الاحداثي y_B للنقطه B

وبما أن النقطة A تقع على الدالة اذاً تحقق تمثيلها الجبري

اذاً:

$$y_A=-x_A^2+9x_A-15$$

$$\boxed{A\,(x_A\,,-x_A^2+9x_A-15)} \quad \text{والتالي}$$

(ب) مساحة المستطيل = $AC\cdot AB$

$$AC=y_A-0=-x_A^2+9x_A-15-0$$

$$\boxed{AC=-x_A^2+9x_A-15}$$

$$AB=x_A-x_B=x_A-0$$

$$\boxed{AB=x_A}$$

اذاً الدالة التي تعبر عن مساحة المستطيل

$$f(x)=x_A\cdot(-x_A^2+9x_A-15)$$

$$\boxed{f(x_A)=-x_A^3+9x_A^2-15x_A}$$

نجد النقاط القصوى لدالة المساحة ونحصل على النقطة A التي تعطينا أكبر مساحة

$$f(x_A) = -x_A^3 + 9x_A^2 - 15x_A$$

$$f'(x_A) = -3x_A^2 + 18x_A - 15$$

$$f'(x_A) = 0$$

$$:-3 \;/\; -3x_A^2 + 18x_A - 15 = 0 \;/ :-3$$

$$x_A^2 - 6x_A + 5 = 0$$

نحلها حسب الدستور

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \mp \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot1\cdot5}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \mp \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \mp \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \mp 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \qquad x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\boxed{x_1 = 5} \qquad \boxed{x_2 = 1}$$

اذا حصلنا على نقطتين، نفحص أيها تعطينا أكبر مساحة

x	$x<1$ ($x=0$)	1	$1<x<5$ ($x=2$)	5	$x>5$ ($x=6$)
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$$

$$f'(0) = -15 < 0$$

$$f'(2) = -3\cdot2^2 + 18\cdot2 - 15$$
$$-12 + 36 - 15 = 9 > 0$$

$$f'(6) = -3(6)^2 + 18\cdot6 - 15$$
$$-108 + 108 - 15 = -15$$

$\boxed{x_A = 5}$ اذا أكبر مساحة عندما يكون

وعندها!

$$y_A = -(5)^3 + 9\cdot5 - 15$$

$$y_A = -25 + 45 - 15 = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{A(5,5)}$$

م- اكبر مساحة للمستطيل ABOC هي :-

$$x_A \cdot y_A = 5\cdot 5 = 25$$

ولذلك لا يمكن ان تكون مساحة المستطيل 30